পুনৰাবৃত্ত লঘিষ্ঠ অংশ যুক্ত বিভাজন সম্পৰ্কীয় এটা বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ

নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা আৰু পংকজ জ্যোতি মহন্ত

বিভাজন

একোটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল ৰূপে প্ৰকাশ কৰিলে, সেই ৰূপটোক সংখ্যাটোৰ এটা বিভাজন (partition) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত যোগ হৈ থকা প্ৰতিটো সংখ্যাক এটা এটা অংশ (part) বোলা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, 4 ৰ এটা বিভাজন হৈছে $2+1+1$। সাধাৰণতে, ইয়াক $(2,1,1)$ ৰূপেও লিখা হয় আৰু যোগ হোৱা সংখ্যাসমূহৰ ক্ৰমক বিবেচনা কৰা নহয়। অৰ্থাৎ, 4 ক $2+1+1$ আৰু $1+2+1$ ৰূপত লিখিলে, দুয়োটাই একেটা বিভাজনকে বুজাব।

সংখ্যাবোৰৰ মুঠ বিভাজনৰ পৰিমাণক বুজোৱা ৰাশিটোক বিভাজন ফলন (partition function) বোলে, আৰু ইয়াক $p(n)$ ৰে চিহ্নিত কৰা হয়। সেয়ে, $p(5)=7$, কাৰণ 5 ৰ মুঠ বিভাজন সাতটা আৰু সেইকেইটা হৈছে:

$$5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1, 1+1+1+1+1.$$

সাধাৰণতে 0 ৰো এটা ৰিক্ত বিভাজন আছে বুলি ধৰি $p(0)=1$ লোৱা হয়।

সৃষ্টক ফলন বা উৎপাদিত ফলন

বিভাজন তত্ত্বৰ সৈতে প্ৰগাঢ়ভাৱে জড়িত এটা ধাৰণা হৈছে q-series। বিভাজন ফলনৰ গভীৰলৈ যাবলৈ চেষ্টা কৰোঁতে ব্যৱহাৰ হোৱা বিভিন্ন গাণিতিক আহিলাসমূহৰ ভিতৰত এইটোও এটা।

কোনো অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n আৰু জটিল সংখ্যা a, q ৰ বাবে তলৰ প্ৰচলিত q-product ৰ সংজ্ঞাবোৰ লোৱা হওক:

$$(a;q)_0 := 1,$$
$$(a;q)_n := \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),$$

আৰু

$$(a;q)_\infty := \lim_{n\to\infty}(a;q)_n = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \text{ য'ত } |q|<1.$$

বিভাজন ফলনৰ সৃষ্টক ফলন (generating function) টোৰ ৰূপটো হ'ব:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q;q)_\infty}.$$

কাৰণ,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(q;q)_\infty} &= \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q^2}\cdots\frac{1}{1-q^k}\cdots\\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} q^{1.n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty} q^{2.n_2}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty} q^{k.n_k}\cdots,
\end{aligned}
$$

আৰু ইয়াৰ জৰিয়তে সৃষ্টক ফলনটোৰ শুদ্ধতা ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি। ইয়াত, সোঁফালৰ প্ৰথম শ্ৰেণীটোৱে কোনো একোটা সংখ্যাৰ বিভাজনত অংশ 1 টো কিমানবাৰ থাকিব তাক নিৰ্ণয় কৰে। সেইদৰে, দ্বিতীয় শ্ৰেণীটোৱে বিভাজনত অংশ 2 টো কিমানবাৰ থাকিব, তৃতীয় শ্ৰেণীটোৱে বিভাজনত অংশ 3 টো কিমানবাৰ থাকিব সেয়া নিৰ্ণয় কৰে, ইত্যাদি।

এটা জটিল প্ৰশ্নৰ সহজ উত্তৰ

গণিতত অতি সহজেই বুজিব পৰা প্ৰশ্নৰো উত্তৰ অত্যন্ত জটিল হোৱাৰ দেখাৰ উদাহৰণ আছে। কিছুমান উত্তৰ পাবলৈতো শ শ বছৰ ৰ'ব লগা হয়। তেনেকৈ, কিছুমান জটিল যেন লগা প্ৰশ্নৰ তেনেই সহজ অথচ বিচক্ষণ উত্তৰ পোৱা যায়। তলৰ উপপাদ্যটোৰো তেনে এটা উত্তৰ আছে।

উপপাদ্যঃ ধৰা হওক, $p_o(n)$ এ অযুগ্ম অংশৰে গঠিত n ৰ বিভাজনৰ সংখ্যাক বুজায়, আৰু $Q(n)$ এ পৰস্পৰ অসমান অংশৰে গঠিত n ৰ বিভাজনৰ সংখ্যাক বুজায়। তেন্তে, সকলো $n \geq 1$ ৰ বাবে,

$$p_o(n) = Q(n).$$

উদাহৰণস্বৰূপে, $n = 9$ ৰ অযুগ্ম অংশৰে গঠিত বিভাজনসমূহ হ'ল 9, $7+1+1$, $5+3+1$, $5+1+1+1+1$, $3+3+3$, $3+3+1+1+1$, $3+1+1+1+1+1+1$, $1+1+1+1+1+1+1+1+1$, আৰু পৰস্পৰ অসমান অংশৰে গঠিত বিভাজনসমূহ হ'ল 9, $8+1$, $7+2$, $6+3$, $6+2+1$, $5+4$, $5+3+1$, $4+3+2$. অৰ্থাৎ $p_o(9) = Q(9) = 8$. তলত আমি এই বিশেষ বিভাজন ফলন দুটাৰ সৃষ্টক ফলন দুটা পাম, আৰু পাঠকসকলে সিহঁতক শ্ৰেণীলৈ বিস্তাৰিত কৰিলে দেখা পাব যে দুয়োটা শ্ৰেণীতে q^9 ৰ সহগ 8.

উপৰ্যুক্ত উপপাদ্যৰ প্ৰমাণঃ ওপৰত আমি $p(n)$ ৰ সৃষ্টক ফলনটোত দেখিছিলোঁ যে প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বাবে এটাকৈ শ্ৰেণী লোৱা হৈছে। তেনেদৰে, $p_o(n)$ ৰ সৃষ্টক ফলনটো পাবলৈ আমি প্ৰতিটো অযুগ্ম সংখ্যাৰ বাবে এটাকৈ শ্ৰেণী ল'লেই হ'ব। অৰ্থাৎ, আমি পাম,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n) q^n = \frac{1}{(q;q^2)_\infty}.$$

এতিয়া,

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q)_\infty} = \frac{(-q;q)_\infty (q;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = (-q;q)_\infty.$$

আনহাতে, $(-q;q)_\infty = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^k)\cdots$. সেয়ে ই অংশসমূহ পৃথক পৃথক হোৱা বিভাজনবিলাকক নিৰ্দেশ কৰে। অৰ্থাৎ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q(n) q^n = (-q;q)_\infty.$$

গতিকে আমি পাওঁ $p_o(n) = Q(n)$.

এই প্ৰমাণটো দিছিল গণিতজ্ঞ অয়লাৰে, ওঠৰ শতিকাত। ই যে কেৱল প্ৰথমে জটিল যেন লগা এটা প্ৰশ্নৰ চমৎকাৰ আৰু যথেষ্ট সৰল উত্তৰ, তেনে নহয়। ই কোনো একোটা সংখ্যাৰ এক প্ৰকাৰৰ বিভাজনৰ সংখ্যা আন এক প্ৰকাৰৰ বিভাজনৰ সংখ্যাৰ সৈতে যে সমান হ'ব পাৰে সেই সম্পৰ্কে অধিক কৌতূহলৰ সৃষ্টি কৰে।

প্ৰশ্নটোৰ বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ

ওপৰৰ প্ৰমাণটো আছিল বিশ্লেষণাত্মক। তাত q-series ৰ গঠনৰ গাণিতিক সাল-সলনি ঘটাই উত্তৰ বিচৰা হৈছে। তাত বিভাজনসমূহৰ ৰূপ কেনেকুৰা, সেয়া চোৱা হোৱা নাই। তাত বিভাজনবোৰ গণনা কৰা নাই, বা এক পক্ষৰ কোনটো বিভাজন আনটো পক্ষৰ কোনটো বিভাজনৰ সৈতে শাৰী কৰি ৰাখিব পৰা যাব সেয়াও তাৰ জৰিয়তে ওলোৱা নাই। এনেবোৰ কথা জানিব বিচৰা শাখাটো হৈছে বিন্যাস তত্ত্ব। উপপাদ্যটোৰ এটা বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ তলত বৰ্ণনা কৰা ধৰণে দিয়া হয়।

প্ৰথমে, কেৱল অযুগ্ম অংশৰে গঠিত এটা বিভাজন বিবেচনা কৰা হওক। যদি বিভাজনটোত i অংশটো k_i বাৰ থাকে, তেন্তে বিভাজনটোক আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁঃ

$$n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{k_1 \text{ বাৰ}} + \underbrace{3+3+\cdots+3}_{k_3 \text{ বাৰ}} + \cdots + \underbrace{(2m-1)+(2m-1)+\cdots+(2m-1)}_{k_{2m-1} \text{ বাৰ}}.$$

অৰ্থাৎ,

$$n = k_1 \cdot 1 + k_3 \cdot 3 + \cdots + k_{2m-1} \cdot (2m-1). \qquad (১)$$

এতিয়া, প্ৰতিটো k_i ক 2 ৰ কিছুমান সুকীয়া সুকীয়া ঘাতৰ যোগফল ৰূপে অদ্বিতীয় ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পৰা যায় (যিটো কাম সকলো অখণ্ড সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতে কৰিব পৰা যায়)। গতিকে, আমি তলৰ ৰূপটো পামঃ

$$n = (2^a + 2^b + \cdots + 2^c)\cdot 1 + (2^f + 2^g + \cdots + 2^h)\cdot 3 + \cdots + (2^r + 2^s + \cdots + 2^t)\cdot(2m-1). \quad (২)$$

ইয়াৰ জৰিয়তে আমি n ৰ এই বিভাজনটো পামঃ

$$n = 2^a + 2^b + \cdots + 2^c + 2^f\cdot 3 + 2^g \cdot 3 + \cdots + 2^h \cdot 3 + \\ \cdots + 2^r\cdot(2m-1) + 2^s\cdot(2m-1) + \cdots + 2^t\cdot(2m-1). \quad (৩)$$

এই বিভাজনটো হৈছে পৰস্পৰ অসমান অংশৰে গঠিত বিভাজন। কাৰণ, পাটিগণিতৰ বুনিয়াদী উপপাদ্যৰ পৰা আমি জানো যে, সংখ্যাৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণত 2 ৰ সুকীয়া ঘাতে বা 2 ৰ একে ঘাতৰ লগত পূৰণ হৈ থকা সুকীয়া ডাঙৰ অযুগ্ম সংখ্যাই একোটা পৃথক সংখ্যা দিয়ে।

এতিয়ালৈকে কৰা ব্যাখ্যাখিনিৰ জৰিয়তে আমি দেখিলোঁ যে, কেৱল অযুগ্ম অংশৰে গঠিত n ৰ প্ৰতিটো বিভাজনৰ বিপৰীতে পৰস্পৰ অসমান অংশৰে গঠিত একোটা সুকীয়া বিভাজন পাম। অকণমান মন কৰিলেই গম পোৱা যায় যে ইয়াৰ ওলোটাটোও শুদ্ধ। তথাপি, আমি তলৰ বহল ব্যাখ্যাখিনি এবাৰ কৰি চাব পাৰোঁঃ

প্ৰথমে আমি, পৰস্পৰ অসমান অংশৰে গঠিত n ৰ বিভাজন এটা লওঁ। এতিয়া আমি, প্ৰতিটো অংশক এটা অযুগ্ম সংখ্যা আৰু 2 ৰ ঘাতৰ পূৰণফল হিচাপে লিখিব পাৰোঁ। অৰ্থাৎ, ইয়াৰ ফলত ওপৰত দিয়া ৩ ৰ দৰে এটা ৰূপ পাম। এতিয়া আমি, একে অযুগ্ম সংখ্যা পূৰণ হৈ থকা অংশবোৰ এটা গোটত ৰাখি ল'ম। তেনেকুৱা কৰিলে, ২ ৰ ৰূপটো পাম। এইবাৰ, একেটা অযুগ্ম সংখ্যা পূৰণ হৈ থকা 2 ৰ ঘাতবোৰ যোগ কৰি ১ ৰ দৰে ৰূপটো লাভ কৰিম। ফলত, কেৱল অযুগ্ম অংশৰে গঠিত n ৰ বিভাজন এটা পাম।

উদাহৰণঃ ওপৰৰ বিশ্লেষণাত্মক প্ৰমাণটোৱে কয় যে $p_o(9) = Q(9) = 8$. কিন্তু, এই বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণটোৰ দ্বাৰা $n = 9$ ৰ বাবে দুয়ো পক্ষৰ বিভাজনসমূহ তলত দিয়া ধৰণে পৰস্পৰ সংযুক্ত কৰিব পৰা যায়।

$$9 \leftrightarrow 9,$$
$$7+1+1 \leftrightarrow 7+2\cdot 1 \leftrightarrow 7+2,$$
$$5+3+1 \leftrightarrow 5+3+1,$$
$$5+1+1+1+1 \leftrightarrow 5+4\cdot 1 \leftrightarrow 5+4,$$
$$3+3+3 \leftrightarrow 3\cdot 3 \leftrightarrow (2+1)\cdot 3 \leftrightarrow 6+3,$$
$$3+3+1+1+1 \leftrightarrow 2\cdot 3+3\cdot 1 \leftrightarrow 2\cdot 3+(2+1)\cdot 1 \leftrightarrow 6+2+1,$$
$$3+1+1+1+1+1+1 \leftrightarrow 3+6\cdot 1 \leftrightarrow 3+(4+2)\cdot 1 \leftrightarrow 3+4+2 \leftrightarrow 4+3+2,$$
$$1+1+1+1+1+1+1+1+1 \leftrightarrow 9\cdot 1 \leftrightarrow (8+1)\cdot 1 \leftrightarrow 8+1.$$

এইধৰণৰ প্ৰমাণক bijective proof বুলি কোৱা হয়। বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণৰ ই এটা বহু প্ৰচলিত ধৰণ।

বিন্যাস তত্ত্বৰ সহজবোধতা আৰু জটিলতা

বহু সময়ত দেখা যায় যে, বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ বা ব্যাখ্যা একোটাত বহু তৰপীয়া অন্বেষণ জড়িত থাকিলেও সেইটো বুজি পাবলৈ গণিতৰ আন শাখাতকৈ তুলনামূলকভাৱে যথেষ্ট সহজ হয় বা বুজোঁতে কম সময় লাগে। কিন্তু, সেই প্ৰমাণ বা ব্যাখ্যাটো এবাৰো নোচোৱা পৰ্যন্ত মনলৈ কোনো বাট নাহিবও পাৰে। অৰ্থাৎ সেইটো প্ৰমাণ বা ব্যাখ্যা কৰিবলৈ মৌলিক চিন্তাৰ প্ৰয়োজন হয়। কেতিয়াবা এনেকুৱাও হয় যে বিন্যাস তত্ত্বই প্ৰশ্ন একোটাৰ অধিক তথ্য প্ৰদান কৰে, যিবোৰ বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতি বা আন পদ্ধতিৰে পোৱা নাযায়। আনহাতে, কেতিয়াবা ওলোটাটোও ঘটে। আৰু গণিতজ্ঞসকলে কোনো এক পদ্ধতিৰে প্ৰমাণ একোটা দিয়াৰ পাছতো, আন পদ্ধতিৰে প্ৰমাণ কৰিব পাৰি নেকি তাৰো সন্ধান কৰি থাকে। আন ধৰণে প্ৰমাণ হোৱা বহু উপপাদ্যৰ বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ এতিয়াও কৰিব নোৱৰা অৱস্থাত পৰি আছে।

এটা নতুন কাম

২০২৫ চনৰ মাৰ্চ মাহত জৰ্জ এণ্ড্ৰুজ আৰু মহম্মদ বাচ্চাৰৈৰ এখন গৱেষণা-পত্ৰ 'Journal of Mathematical Analysis and Applications' জাৰ্নেলত প্ৰকাশিত হয়। তাত তেওঁলোকে বিশেষ কেইটামান বিভাজন ফলনৰ সৃষ্টক ফলন উলিয়াইছিল, সেইসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি কেইটামান অনুসিদ্ধান্ত প্ৰমাণ কৰিছিল, আৰু সেই অনুসিদ্ধান্তসমূহৰ কেইটামানত আছিল যে বিশেষ একোটা প্ৰকাৰৰ বিভাজনৰ সংখ্যা অন্য বিশেষ একাধিক প্ৰকাৰৰ বিভাজনৰ সংখ্যাৰ যোগফলৰ সৈতে সমান। উল্লেখযোগ্য যে জৰ্জ এণ্ড্ৰুজ 'ৰামানুজনৰ হেৰোৱা টোকাবহী' উদ্ধাৰ কৰা আৰু পাছলৈ সেইসমূহ সম্পাদিত কৰি গ্ৰন্থ ৰূপত প্ৰকাশৰ কামত জড়িত হোৱা প্ৰসিদ্ধ গণিতজ্ঞগৰাকী। তেওঁ আমেৰিকান গাণিতিক সমিতিৰ সভাপতিও আছিল। বিভাজন তত্ত্ব, বিশেষকৈ q-series ৰ বিশ্লেষণত তেওঁৰ দৰে সিদ্ধহস্ত গণিতজ্ঞ বিশ্বত কমেই আছে। তেওঁ লিখা 'The Theory of Partitions' গ্ৰন্থখন বিভাজন তত্ত্বৰ বাইবেলস্বৰূপ।

উল্লিখিত গৱেষণা-পত্ৰখনত তেওঁলোকৰ প্ৰমাণসমূহ আছিল বিশ্লেষণাত্মক। তেওঁলোকে সেই অনুসিদ্ধান্তসমূহৰ বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ অন্য গৱেষকৰ বাবে মুকলি সমস্যা ৰূপে আগবঢ়াইছিল।

আমি তাৰে কেইটামান অনুসিদ্ধান্তৰ বিন্যাস তাত্ত্বিক প্ৰমাণ আগবঢ়াবলৈ সক্ষম হওঁ। এই সম্পৰ্কীয় 'Bijective proofs of some results on partitions with repeated smallest parts' শীৰ্ষক আমাৰ গৱেষণা-পত্ৰখন ২০২৫ ৰ ডিচেম্বৰত 'The Ramanujan Journal' শীৰ্ষক জাৰ্নেলখনত প্ৰকাশ পায়। তলৰ অনুচ্ছেদত আমি তাৰে এটা প্ৰমাণৰ এটা অংশ পাঠকলৈ আগবঢ়াইছোঁ।

প্ৰমাণটো

প্ৰথমে আমি কেইটামান সংজ্ঞা চাব লাগিব।

- ধৰা হওক, $s(\pi)$ এ π বিভাজনটোৰ লঘিষ্ঠ অংশটো, অৰ্থাৎ আটাইতকৈ সৰু অংশটো চিহ্নিত কৰে।
- যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n আৰু k ৰ বাবে, ধৰা হওক $\mathrm{Spt}k_{do}(n)$ এ n ৰ সেইসমূহ বিভাজন π ৰ সংহতিটোক বুজায় য'ত $s(\pi)$ সম্পূৰ্ণ k বাৰ থাকে আৰু বাকী অংশসমূহ পৰস্পৰ অসমান হোৱাৰ লগতে সিহঁতৰ কোনোটোৰ পৰা $s(\pi)$ বিয়োগ কৰিলে বিয়োগফলটো 2 ৰে হৰণ নাযায়। সেই অনুযায়ী ধৰা হওক, $\mathrm{spt}k_{do}(n)$ এ $\mathrm{Spt}k_{do}(n)$ সংহতিটোৰ মাত্ৰা বুজায়। ধৰা হওক, $B_0(k,n)$ (যথাক্ৰমে, $B_1(k,n)$) এ $\mathrm{Spt}k_{do}(n)$ সংহতিটোৰ সেইসমূহ বিভাজন π ৰ মুঠ সংখ্যাক বুজায় য'ত $s(\pi)$ তকৈ ডাঙৰ অংশসমূহৰ মুঠ সংখ্যা যুগ্ম (যথাক্ৰমে, অযুগ্ম), আৰু ধৰা হওক
$$\mathrm{spt}k'_{do}(n) = B_0(k,n) - B_1(k,n).$$
- $p_{do}(n)$ হৈছে পৰস্পৰ অসমান অযুগ্ম অংশৰে গঠিত n ৰ বিভাজনসমূহৰ মুঠ সংখ্যা।
- $p'_{do}(n)$ হৈছে তলৰ প্ৰথমটোৰ পৰা দ্বিতীয়টোৰ বিয়োগফলঃ
  (ক) $p_{do}(n)$ এ গণনা কৰা সেইসমূহ বিভাজনৰ মুঠ সংখ্যা য'ত অংশৰ সংখ্যা যুগ্ম।
  (খ) $p_{do}(n)$ এ গণনা কৰা সেইসমূহ বিভাজনৰ মুঠ সংখ্যা য'ত অংশৰ সংখ্যা অযুগ্ম।

এতিয়া আমি আগবঢ়াব বিচৰা সিদ্ধান্তটো হ'লঃ যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা $n \geq 5$ ৰ বাবে, আমি পাওঁ
$$\mathrm{spt}2'_{do}(n) = p'_{do}(n-4) - p'_{do}(n-3) - p'_{do}(n-2).$$

যদি n যুগ্ম হয়, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰমাণটোত দীঘলীয়াকৈ অতিৰিক্ত ব্যাখ্যা আগবঢ়োৱাৰ প্ৰয়োজন হয়। সেয়ে, পাঠকৰ বাবে ইয়াত আমি কেৱল অযুগ্ম n ৰ বাবেহে প্ৰমাণটো দেখুৱাম।

প্ৰথমে আমি চিহ্নিত কৰি লওঁ যে, $p_{do}(n)$ আৰু $p'_{do}(n)$ বিভাজন ফলন দুটাত নিহিত থকা বিভাজনসমূহৰ সংহতিক ক্ৰমে $\mathcal{P}_{do}(n)$ আৰু $\mathcal{P}'_{do}(n)$ এ বুজায়। তদুপৰি, $B_0(k,n)$ আৰু $B_1(k,n)$ ফলন দুটাত নিহিত থকা বিভাজনসমূহৰ সংহতিক ক্ৰমে $SB_0(k,n)$ আৰু $SB_1(k,n)$ এ বুজায়, আৰু $\mathrm{Spt}k_{do}(n)$ ৰ অন্তৰ্ভুক্ত সেইসমূহ বিভাজন π ৰ সংহতিটো য'ত $s(\pi)$ যুগ্ম তাক $\mathrm{Spt}k^E_{do}(n)$ এ বুজায়।

প্ৰমাণঃ যদি $\pi \in \mathrm{Spt}2_{do}(n)$, আৰু n অযুগ্ম, তেন্তে $s(\pi)$ যুগ্ম হ'বই লাগিব।

গতিকে, প্ৰমাণটোৰ বাবে, আমি যুক্ত হ'বলগীয়া সংহতিকেইটা হ'ল $\mathrm{Spt}2^E_{do}(n)$, $\mathcal{P}_{do}(n-4)$, $\mathcal{P}_{do}(n-3)$, আৰু $\mathcal{P}_{do}(n-2)$. এতিয়া আমি একোটা সংহতিত থকা কিছুমান বিভাজনৰ সংশ্লিষ্ট ৰূপত আন একোটা সংহতিৰ কিছুমান বিভাজন পাবলৈ একোটা ফলন গঠন কৰিম।

যদি $\pi \in SB_0(k,n)$ (বা $SB_1(k,n)$) আৰু যদি ইয়াৰ সংশ্লিষ্ট বিভাজনটো কোনো m ৰ বাবে $\mathcal{P}_{do}(m)$ ত থাকে যিটো যুগ্ম (বা অযুগ্ম) সংখ্যক অংশৰে গঠিত, তেন্তে দুয়োটা বিভাজনক আমি অভিন (SAME) প্ৰকৃতিৰ বুলি ক'ম। অন্যথা, আমি সিহঁতক বিপ্ৰতীপ (OPPOSITE) প্ৰকৃতিৰ বুলি ক'ম। যিকোনো m আৰু n ৰ বাবে $\mathcal{P}_{do}(m)$ ৰ পৰা $\mathcal{P}_{do}(n)$ লৈ সংশ্লিষ্ট বিভাজন উলিয়াওঁতেও আমি এই সংজ্ঞা দুটা ব্যৱহাৰ কৰিম।

এই অনুসৰি, এতিয়া আমি সংশ্লিষ্ট বিভাজনবোৰ পাবলৈ তলৰ ফলনবোৰ গঠন কৰিম।

1) $\mathcal{P}_{do}(n-4)$ ৰ পৰা $\mathrm{Spt2}_{do}^{E}(n) \bigcup \mathcal{P}_{do}(n-2)$ লৈ।

$$(\pi_1, \ldots, s(\pi)) \begin{cases} \xrightarrow{f_1} (\pi_1, \ldots, s(\pi), 2, 2), & \text{যদি } s(\pi) \neq 1, \\ \xrightarrow{f_2} (\pi_1 + 2, \ldots, s(\pi)), & \text{যদি } s(\pi) = 1. \end{cases}$$

ইয়াত, সংশ্লিষ্ট বিভাজনবোৰ অভিন প্ৰকৃতিৰ। তদুপৰি, $f_1(\pi) \in \mathrm{Spt2}_{do}^{E}(n)$ আৰু $f_2(\pi) \in \mathcal{P}_{do}(n-2)$.

2) $\mathcal{P}_{do}(n-3)$ ৰ পৰা $\mathrm{Spt2}_{do}^{E}(n) \bigcup \mathcal{P}_{do}(n-2)$ লৈ।

$$(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r, s(\pi)) \begin{cases} \xrightarrow{f_3} (\pi_1 - s(\pi) + 1, \pi_2, \ldots, \pi_r, s(\pi)+1, s(\pi)+1), \\ \qquad\qquad \text{যদি } s(\pi) \neq 1 \text{ আৰু } \pi_1 - \pi_2 > s(\pi), \\ \xrightarrow{f_4} (\pi_2 + 2, \pi_2, \ldots, \pi_r, s(\pi), \pi_1 - \pi_2 - 1), \\ \qquad\qquad \text{যদি } s(\pi) \neq 1 \text{ আৰু } \pi_1 - \pi_2 < s(\pi), \\ \xrightarrow{f_5} (\pi_1 + 2, \pi_2, \ldots, \pi_r), \\ \qquad\qquad \text{যদি } s(\pi) = 1. \end{cases}$$

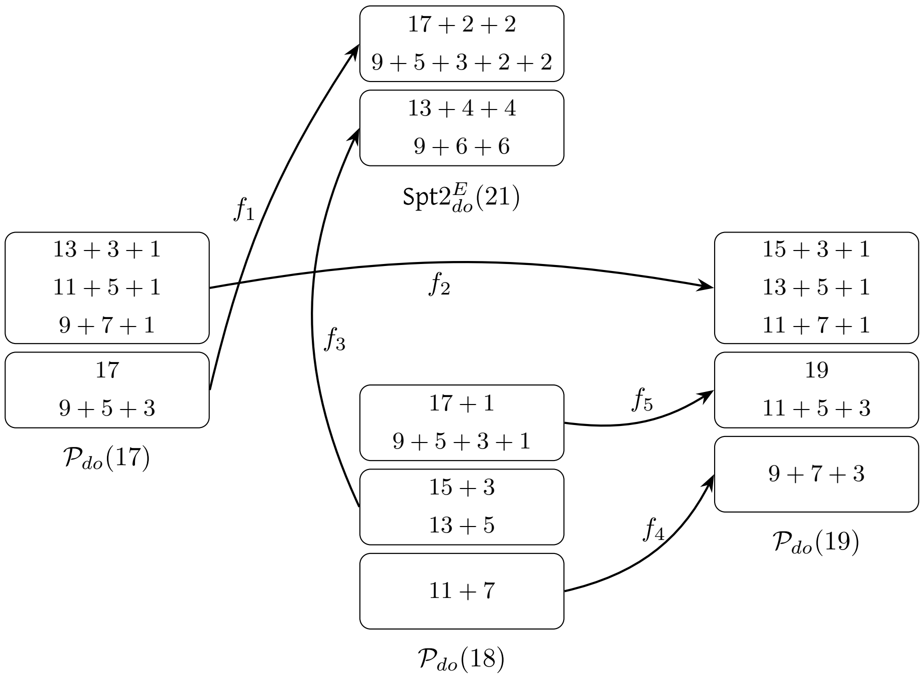
ইয়াত, $f_3(\pi) \in \mathrm{Spt2}_{do}^{E}(n)$ আৰু $f_4(\pi), f_5(\pi) \in \mathcal{P}_{do}(n-2)$, আৰু প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে সংশ্লিষ্ট বিভাজনবোৰ বিপ্ৰতীপ প্ৰকৃতিৰ।

গতিকে, আমি পাওঁ

$$p'_{do}(n-4) - \mathrm{spt2}'_{do}(n) - p'_{do}(n-3) - p'_{do}(n-2) = 0.$$

ই আমাৰ প্ৰমাণটো সম্পূৰ্ণ কৰে।

তলৰ চিত্ৰটোত এটা উদাহৰণ দেখুওৱা হ'ল।



$n = 21$ ৰ বাবে সংশ্লিষ্ট বিভাজনবোৰ।

তথ্যসূত্ৰ আৰু সামৰণি

বিভাজন তত্ত্ব সম্পৰ্কে অধিক আগ্ৰহী পাঠকে তলত উল্লিখিত গ্ৰন্থখন আৰু গৱেষণা-পত্ৰ দুখন ক্ৰম অনুসাৰে পঢ়ি চাব পাৰে। শেহতীয়াকৈ এণ্ড্ৰুজ আৰু তেওঁৰ সহ-লেখকগৰাকীয়ে ভালেখিনি বিন্যাস তাত্ত্বিক সমস্যা আগবঢ়াইছে। পাঠকসকলে সেইসমূহ সমাধানত জড়িতও হ'ব পাৰে।

[১] Andrews, G.E.: The Theory of Partitions. Addision-Wesley, Reading, MA (1976); reissued: Cambridge University Press, Cambridge (1998)

[২] Andrews G.E., El Bachraoui, M.: On the generating functions for partitions with repeated smallest part. J. Math. Anal. Appl. **549**, 129537 (2025)

[৩] Baruah, N.D., Mahanta, P.J.: Bijective proofs of some results on partitions with repeated smallest parts. Ramanujan J. **69**, 11 (2026)

নয়নদীপ ডেকা বৰুৱা তেজপুৰ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ গণিতবিজ্ঞান বিভাগৰ অধ্যাপক আৰু **পংকজ জ্যোতি মহন্ত** একে বিভাগৰে গৱেষক ছাত্ৰ।

Email address: `nayandeeptezu@gmail.com`, `pjm2099@gmail.com`